1. 报告摘要
   1. 问题简介

武器目标分配问题是一个军事领域中经典的数学优化问题，最初由Manne（1958年）引入，最开始的目标为为来袭导弹分配可用的拦截弹，以最小化导弹摧毁受保护物资的概率。随着对问题研究的深入与算力的进步，武器目标分配逐渐发展出很多不同的领域，其中一个重要的划分标准为十分将时间纳入考虑范围，根据考虑的阶段数，将问题分为了静态WTA问题（SWTA问题）与动态WTA问题（DWTA问题）。静态WTA问题中不考虑时间，仅考虑针对一次导弹来袭所做的拦截。而动态WTA问题则主要考虑拦截 - 观察 - 拦截的模式，即每次打击过后观察打击的结果并安排下一次打击。Lloyd和Witsenhausen(1986) 证明了即使是较为简单的静态WTA仍然是NP完全的，因此在之前的研究中，大多数研究者的研究课题是寻找合适的智能方法，通过启发式算法在一个较短的时间内寻找接近最优解的方法。但启发式算法并不能在理论上保证最终结果的最优性，在之前的研究中，使用整数规划方法，求解问题精确解的研究内容较少，求解规模较小，直到近几年才有相对有效的算法出现，本次研究即希望立足于作战体系中武器目标分配的的精确求解算法研究，根据问题的特殊结构，分析问题的数学理论性质并设计高效的精确算法，为指挥员在兵器系统种类和数量庞大、突击时间短、对抗强度大的复杂战场形势下及时做出最优决策提供技术支持。

* 1. 报告结构介绍

本次报告的以下内容将分为如下几个部分。在第二部分中，将详细介绍问题的背景，包括WTA问题的基本历史发展，在使用整数规划方法求解WTA精确解过程中可能用到的数学工具，以及对问题困难性的补充。在第三部分中，将详细介绍截至目前的研究中，针对WTA问题所建立的各种数学模型，并分析其适用性范围并讨论是否适用于本项目。在第四部分中，将介绍从第三部分中的诸多数学模型中与本项目相关程度较大的模型的求解算法，并介绍这些求解算法所能达到的求解速度与求解规模。在第五部分中，将介绍我们团队目前针对该问题的数学建模与求解算法的初步构想，并分析其合理性，同时给出未来的研究计划。在第六部分中将对报告进行总结。

# 背景 / 问题的重要性

## 问题的数学背景

### 优化问题与整数规划问题相关的基本概念

数学规划是数学中的一个分支，它主要研究的目标在给定的区域中寻找可以最小化或最大化某一函数的最优解。其最基本的模型形式就是假设存在一个函数，我们希望能够在给定的定义域A中找到满足函数值最小或者最大的点，其中函数的自变量被称为决策变量。

针对本次研究课题武器目标分配问题，由于要做的决策是某个特定的武器是否要打击某个特定的目标，因此决策变量通常设置为0-1变量，即如果采用某个特定的武器打击某个特定的目标，即将变量设置为1，否则就设置为0，因此整体上属于整数规划的框架。

整数规划问题的定义即为部分决策变量或全部决策变量为限制为整数的有约束的数学规划问题。根据计算复杂度理论，整数规划整体上是一个非常困难的问题。对于整数规划问题的一般形式，即使假设所有的变量为二值变量（即x的取值只能是0或者1），并且只需要满足限制条件而没有目标函数的问题（即不要求对问题进行最优化，而仅需要找到一个满足要求的解），依然是一个NP完全问题，即按照目前的观点，无法找到一个理论上满足多项式时间的算法来求解得到问题的精确解。因此对于整数规划问题，需要针对具体的结构来设计相应的算法，以期其在实际表现中达到一个比较块的求解速度。

因此本次项目中，主要需要完成的部分包括将现实问题转化为一个整数规划模型，再依据此整数规划模型对问题进行求解。通过于主承研部分的沟通来不断完善数学规划模型的构建，在初步建立了一个模型后，将重心放在对于算法的设计，以期尽可能扩大计算规模并增加计算速度，以保证求解结果能够尽可能地辅助评价其他启发式算法结果。

（数学规划的基本数学形式）

（整数规划的基本形式）

（整数规划的难度）

（数学院要在这个框架下做的东西）

（需要介绍规划问题到什么程度，这个是李洋老师要看的么）

（目的在于向李洋展示我们要做的事情是在什么框架下的，是基于数学模型做一个算法上的改进，需要和北理工的问题相结合，数学建模是否是我们需要完成的一部分）

### 分支定界方法

分支定界（英语：Branch and bound，BB）是用于离散优化、组合优化以及数学优化问题的算法设计范式。分支定界算法可以视为一种对可行解进行穷举的算法，但是和穷举法所不同的是，分支定界算法在对某一分支进行检索之前会先算出该分支的上界或下界，如果界限不比目前最佳解更好，那么该分支就会被舍弃，从而节约了大量的时间。分支定界算法非常依赖合适的上界或下界，如果无法找到合适的界限，该算法将会退化为穷举法，因此在采用分支定界框架对问题进行求解的时候，要点之一就是要想办法改进对于上下界的估计，通过降低搜索的空间，来降低算法求解所需时间。

在分支定界的算法框架中，有几个重要的概念：上界（可行解）、下界（线性规划松弛解）、上下界之间的gap以及剪枝。其中上界的概念是，当目标是最小化目标函数时，选择任何一个可行域中的可行解，就可以保证该解比最优解的目标函数值更大，而可行解经常是在当分支进行的过程中，到某一个Node（点）后，松弛后线性规划问题求得的解是原问题的一个可行解，通过计算该可行解对应的目标函数值就可以得到该分支的上界。而下界则是对问题进行松弛，即扩大问题的可行域，从而使得求解得到的新问题的解不大于原问题的解，从而新问题得到的松弛解即可给出原问题的一个下界。根据上界和下界的定义，由于能够保证目标函数最有值一定在上界和下界之间，因此通过计算上界与下界的偏差，即可得到最优函数值与已求得的可行解之间的偏差不大于上界与下界的偏差。这个偏差与上界的比例即被称为gap，gap的概念保证了解的最优性。最后一个重要的概念是剪枝，即确保在某个分支中一定不会包含最优解，常用的情况包括确定了该分支的下界大于上界，该分支无解，或者确定该分支所能达到的最优情况已经比其他分支的某个情况更差。分支操作保证了求解问题的过程不需要花费过多的时间，解释了为什么整数规划方法能够在较短的时间内给一个NP完全问题提供一个精确解。

举例而言，在WTA问题讨论的过程中，一次分支可以视为对问题进行一次固定，将全部问题划分为1号武器攻击1号目标与1号武器不攻击1号目标两种情况。结合具体问题的分析，通过一定的数学推导，可能得到1号武器攻击1号目标一定会比某个已知的打击方案花费更多，此时即可不考虑包含1号武器攻击1号目标的全部方案，这个过程即为上述提到的剪枝步骤。整个算法的设计过程即针对具体问题设计相对应的分支与剪枝方案，并辅助其他的整数规划求解技巧，直到问题的精确解求解速度能够达到要求。

## WTA问题的发展

### 武器目标分配（WTA）问题的历史发展

从1958年首次在武器目标分配被首次提出以来，研究者曾经针对该问题提出过很多不同的数学模型，其关注的重点包括：武器系统如何进行分类、目标是否有优先级、如何对于伤害的进行、采用进攻型还是防御型的系统，是否将时间纳入考虑范围等多种不同的建模角度。其中一个重要的划分标准为十分将时间纳入考虑范围，根据考虑的阶段数，将问题分为了静态WTA问题（SWTA问题）与动态WTA问题（DWTA问题）。静态WTA问题中不考虑时间，仅考虑针对一次导弹来袭所做的拦截。而动态WTA问题则主要考虑拦截 - 观察 - 拦截的模式，即每次打击过后观察打击的结果并安排下一次打击。针对具体的详细模型，将在第三章中进行展开，在本小节中，将对WTA问题的历史沿革做一个简要的概述。

自 Manne (1958) 的工作以来，WTA问题逐步发展了数学模型与求解算法。在比较早的时期，由于计算机解决大型非线性问题的能力有限 (Day, 1966)，当时的研究者将研究种地放在了形式较为简单的SWTA 问题 (denBroeder et al., 1959) 并结合当时的计算能力开发了二相对应的比较简单的求解方法（Lemus 和 David，1963 年），（Day，1966 年）。 Eckler 和 Burr (1972) 提出并讨论了采用动态规划的方式求解 SWTA 的可能性，但未能较好地得到解决此类问题的算法。随着计算能力的提高，计算机解决更加复杂的问题的能力也在提高。Burr et al.。 (1985) 建模并解决了最早的 DWTA 问题之一，与此同时Chang (1987) Soland (1987) 和 Hosein(1988) 等人也对求解DWTA问题提供了一些方法。同时，用新方法解决了具有较少假设的 SWTA 模型（即 Kwon 等人，1999 年；Metler 等人，1990 年；Wacholder，1989 年），较少的假设保证了问题与现实的情况更加贴合。这种模式一直持续到 2000年。在20世纪0 0年代，模型和求解算法得到了进一步发展：一个发展方向是在模型中引入更多参数，使得模型能够更好地反应现实情况（即 Shang 等人，2007 年和 Karasakal，2008 年）；另一个发展方向则是保证模型能够更加快速地得到最优解或者最优解的近似解（即 Malcolm, 2004，Ahuja 等人，2007 年，以及 Ahner 和 Parson，2015 年）。随着新的模型的建立，后续研究者基于这些模型开发了更新的算法（即 Bertsekas 等人，20 0 0；Kline 等人，2017a；Wu 等人，2008 年）或将原有的方法进行了效果显著的改进（即 Ahuja等，2007；Lee 等，2002a；Su 等，2008；Xin 等，2010）。

随着计算机算力的不断增长，WTA现有的研究方向除了在已经存在的现有模型上改进求解方法之外，还提出了关于目标飞行路径的时间依赖性的动态模型 (Khosla, 2001; Leboucher et al., 2013)，但与现有模型相比受到的关注较少，且这些模型中解决方案技术的改进尚未出现。

Khosla (2001) 指出，“尽管采用了两步法 [Khosla (2001) 中概述]，但每个优化问题仍然即使对于数量不多的威胁、武器系统和时间点，也有巨大的搜索空间。”改进两步法的方法尚未出现。同样，Leboucher at el. (2013) 评论了问题的指数增长并提出了一种两步解决技术，并补充说另一个问题是“如何评估一个解的质量”。WTA 的未来将需要解决前面提到的以调度为中心的 DWTA 的困难与能够利用问题的特殊结构的技术。此外，存在许多问题中本应该被引入的参数，由于它们会带来增加的计算复杂性而被删除，随着计算能力的增加，这些参数可以使用新的理论模型重新引入，以保证模型更加贴合实际情况。

## 整数规划求解方案对WTA问题求解的重要性

### 应用整数规划方法求解WTA问题的目的与意义

现代战争强度大，空袭和防空兵器种类多，如无人机、战术歼击机、强击机、轰炸机、各种直升机、各种巡航导弹、各型战役-战术导弹、远程雷达探测系统、各型防空反导系统等。为帮助指挥员管理如此种类繁多、数量庞大的兵器并及时根据战场形势作出最优决策，需要充分利用现代科学技术如运筹优化的理论与方法、网络技术和云计算技术、智能技术等，将目前已有的各种武器系统形成一个整体，力求整个作战体系在任何形势或环境条件下，都能及时有效地杀伤各种类型的目标，完成作战目标。

运筹优化旨在给定相关条件限制下，分配相关资源并选取某种执行方案使目标达到全局最优。在作战体系中，资源配置通常带有离散的属性（如是否从给定的一个点到另一个点执行某种任务、是否使用某类武器打击某个目标、执行方案是否满足某个场景等），因而，我们面临的运筹优化问题通常带有整数变量，也就是整数规划问题。事实上，上述杀伤网络问题、武器目标分配问题、弹药后勤供应问题等都可建模为整数规划问题。快速有效地求解这些整数规划问题，得到问题的全局最优解，能为指挥员在兵器系统种类和数量庞大、突击时间短、对抗强度大的复杂战场形势下及时做出最优决策提供技术支持，增强我国的国防实力。然而，在理论上，整数规划具有NP困难性，这也给算法设计和分析带来了极大的挑战。本项目旨在充分利用作战体系中的整数规划问题的特殊结构，分析问题的数学理论性质并设计快速有效的求解算法，得到问题的全局最优解，为根据战况及时动态调整并使整个作战体系效能达到实时全局最优提供保障，为指挥员及时有效判明战场形势并做出最优决策提供技术支持。

### 精确算法与启发式算法的对比

精确算法与启发式算法（比如神经网络、粒子群算法等）的一个重要区别在于，启发式算法注重求解速度，但是对于求解得到的结论却难以保证最优性，而采用精确算法的优势在于对于整个求解的过程都有准确的把握，虽然无法保证在任何情况都能够比较快的求解得到最终的解，但能够保证解的有效性，同时在求解的过程中也会依据算法的设计来给出一些-偏差不大的解。

目前对武器目标分配中的整数规划问题有不少研究，但主要还是采用一些智能优化启发式方法（特别是国内学者的研究），如遗传算法（Genetic Algorithm）、模拟退火算法（Simulated Annealing）、蚁群算法（Ant Colony）、粒子群算法（Particle Swarm Optimization）等，这些方法虽然对一些较大规模的问题取得了较好的计算结果，但在理论上并不能保证解的质量，也不能达到系统对计算结果有效性的要求；对于如何采用精确的方法求解，并在相对比较短的时间内给出最优方案，使实时地达到整个体系作战效能全局最优这一问题尚未见到系统的研究。因此有必要根据问题的特殊结构，分析问题的数学理论性质并设计高效的精确算法（如分支定界方法、割平面方法、预处理方法等），给出全局最优解，为指挥员在兵器系统种类和数量庞大、判断时间短的复杂战场形势下及时做出最优决策提供技术支持。

# 已有结果（建模部分）

WTA 有许多不同的建模方式。静态武器目标分配（SWTA）的基本形式是由Manne(1958) 提出的，但其形式为非线性形式。由于非线性规划在当时难以被计算，早期文献试图转换原问题为线性形式。 随着计算能力的提高，出现了更适合的优化工具，比如凸优化或者全局优化的算法，但对于该问题的数学建模基本上仍然是围绕最开始的形式进行变形，使之能够更加符合实际。而Burr (1985) 引入了 DWTA，它在模型中考虑了多阶段问题。与SWTA 类似，原始 DWTA 的变体贯穿整个研究历程。

在对问题进行数学建模的过程中，如何对武器系统、打击目标、作战目的、是否考虑多阶段等关键要素进行刻画决定了最终数学模型的形式。对于武器系统，建模的方式包括要求武器各不相同还是存在几类武器、是否所有的武器都能打到全部的目标、打击结果是固定的还是概率的等问题。对于目标。包括一个目标是否仅能被一个武器攻击、不同的是否有权重和优先级、目标被攻击后受损是部分受损还是完全消灭。针对作战目的，目前主要分为两种情况：防御型与进攻性。其差别在于目的是防止对方摧毁我方目标还是尽可能摧毁地方目标。而动态WTA问题则是考虑到时间因素，是否要将拦截过程分为多阶段，要针对具体的战场环境，根据目前的摧毁情况来制定下一步的策略。

在最新的科研进展中，还考虑了更多的要素，比如是否考虑目标飞行的弹道，是否将传感器与火力作为不同的要素进行考虑等。这些要素的引入都能够使得目标更加接近真实的战场环境，但同样也会让问题的复杂度进一步提升。

未来更好地展示模型，我们首先给出数学模型中我们将要的记号，不同的模型中使用了以下记号中的一部分：

* pij : 武器i摧毁目标j的概率。
* qij : 武器i未能摧毁目标j的概率。
* Vj : 目标j的摧毁价值。
* xij : 分配给目标j的种类为i的武器个数，如果限制每种武器仅有一个，则该变量为0-1变量。
* n : 目标的个数。
* m : 武器种类的个数。如果限制每种武器只有一个，则该变量指示武器的个数。
* wi : 第i类武器的个数
* cij : 将武器i分配给目标j的花费
* sj : 能够非陪给目标j的最大武器数目
* t : 时间阶段（仅在DWTA问题中有效）

## 对于SWTA问题的建模

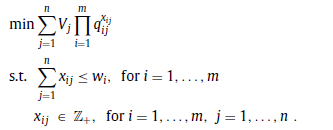
* + 1. 模型一

该模型是Manne (1958) 定义的WTA问题的原始数学模型，这也是以下多种静态WTA模型的基础。建模考虑了作为防守者，共有i = 1, … , m个武器，每种武器有wi个，且使用这些武器攻击j = 1, … , n个目标。且假设每种武器类型i摧毁目标j概率为pij，每个目标 j 都有一个被摧毁的价值Vj。决策变量xij表示分配给目标 j 的类型 i 的武器数量，依此个欸除了WTA问题的原始模型：

图表

中度可信度描述已自动生成

该模型经常将(1 – pij) 改写为 qij ，从而得到模型：



该形式中的中目标函数希望最小化加权的摧毁概率，该形式是非凸的。两个约束分别要求武器分配个数为整数，以及对每个目标的分配不能超过现有的武器数量。

* + 1. 模型二与模型三

模型二与模型三的主要思路是通过对模型一进行简化或者进行一定程度的近似，来保证问题是一个线性规划。这两个模型都是比较早期的模型，当时的计算能力与算法框架难以解决较复杂的非线性规划的问题，因此都将问题转化为了容易解决的模型。这两个模型因为其近似程度较大，导致问题与现实模型偏离太多，因此在此处不进行过于详细的展开，。

模型二的主要思路是假设所有武器对目标 j 的杀伤概率相同，即可得到：

图片包含 文本

描述已自动生成

模型三的主要思路是首先将问题的目标函数转化为线性函数，从而其约束就被转化为了比较复杂的形式，之后对非线性约束进行对数变换并进行下取整，以生成线性近似，依此得到了一个线性规划问题：

文本, 信件

描述已自动生成

虽然该问题计算起来比较容易，但是由于采用了近似的方法，因此无法得到原问题的精确解。

* + 1. 模型四

模型四的思路是利用对数变换对原问题进行一个等价的转换，其假设dij = - ln (qij)，即可得到：

文本, 信件

描述已自动生成

通过这种转变，Ahuja (2007) 将目标函数转换为了多个分离凸函数相加。他们利用这种转换将 SWTA 建模为网络流问题。虽然在数学本质上，该形式与模型一完全等价，但是它的表述方式却更加适合使用求解器进行求解。根据Kline et al.(2017)得到得数值实验结果，采用 BARON 等商业全局优化求解器时，模型四比模型一更可靠，后者的错误最优率约为 21%。

* + 1. 模型五

该模型得思路是限制每种武器仅有一个，因此问题就会被转化为一个0-1规划。其对模型一的改进主要体现在此时目标函数中的决策变量可以从指数项变为多项式项，即

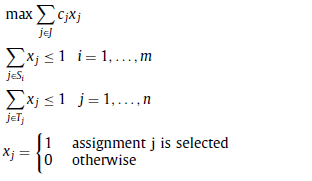


虽然现实中的问题通常每种武器都有不止一种，但可以通过假设所有的武器各不相同来将问题转化为该模型。举例而言，按照第一个模型中，假设有4种武器，每种武器包含4种，则可以直接将16种武器视为完全不同的武器，即可满足该模型种的要求。该转换增加了问题的决策变量的数量，但是针对0-1变量却有更加有效的求解技术。

* + 1. 模型六与模型七

这两种模型同样都是对问题进行了进一步的简化假设。

在模型六种，Rosenberger et al.(2005) 提出了一个简化的公式。他将 SWTA 建模为背包问题，他们定义了一个正的成本参数cj表示将武器分配给目标j时产生的花费，从而得到了以下的背包问题模型：



在这个模型种假设了不能将两种武器分配给同一个目标，这导致了模型虽然在求解时可以利用背包问题的求解方法，但是其泛化能力却比较低。

而在模型七中，Malcolm (2004) 提出了一个具有相同0-1决策变量的形式，其中目标在结构上与 S5 相似，但是依然要求每个目标仅能分配给一个武器，且限制武器和目标的个数相同，从而得到了以下的模型：

手表的卡通人物

中度可信度描述已自动生成

图形用户界面, 文本

描述已自动生成

* + 1. 进攻型模型

除了上述模型之外，还有一类模型考虑了目标对于我方设施的摧毁。即假设每一个目标都会针对我方的一个设施，如果没有成功消灭目标，则它以某种概率对我方设施造成毁伤，此时将问题的目标函数转换为了最小化对我方设施损伤的程度。由于这种模型与我们本项目中的内容结合程度较低，且目前没有什么较好的求解方式，因此在此次报告中并不针对该问题进行详细讨论。

## 对于DWTA问题的建模

# 已有结果（算法部分）

* 1. SWTA问题

### 启发式

【文献结果】

### 精确算法

【文献结果】

【已经尝试过哪些方法】

【能够求解的问题对模型的限制比较大】

【相对普通的模型下能够求解的算法规模】

（我们准备采取的数学模型，其合理性，同时要指出目前的模型采用这个方法比较多，能够与其他算法得到的结果进行一个横向的对比）

## DWTA问题

### 启发式

【文献结果】

### 精确算法

【文献结果】

已有

# 研究思路

## 算法：线性化与列生成方法

### 算法思路

在数学背景一节中，已经指出了整数规划问题的求解难度，而针对WTA问题的具体模型，求解的难点在于其目标函数的形式是非线性的，从而缺乏比较成熟的求解手段。由于这个特点，模型的精确解无法通过已有的求解器直接求解得到，因此需要我们针对问题的具体结构设计适合该问题的算法思路，通过将非线性问题转化为多个较容易求解的线性规划问题。根据文献调研的结果，目前计算结果比较好的思路有两种，一种是通过将场景进行枚举的后将问题转化为一个等价的线性形式，二是通过外逼近算法求解问题，以下将详细介绍这两种求解算法的思路。

对于第一种算法，将场景进行枚举的后将问题转化为一个等价的线性形式虽然能够避免目标函数的非线性性，但是会导致改写后的模型变量非常多，假设武器个数为m，则其规模为个，这会导致直接使用常用的线性规划算法如单纯形法求解问题比较困难，因此针对该结构有不同的方案。在已有文献中，通过分析该问题的结构，准备直接对全部的列进行枚举，但在过程中多加了一些判断条件以降低问题的规模。我们希望对这个子问题采用列生成的方法。这个方法是一个求解线性规划问题的方法，其主要思路是每次选入最可能对问题起到改进效果的变量（比如在该问题中，是针对某个目标采取某个打击形式），不断重复此过程，直到最后找到最优解。关于列生成的主要内容将包含在

对于第二种算法，主要是在分支定界算法的框架下，通过对于目标函数进行分段线性凸函数的下逼近，依此精确求解WTA问题。该方法目前在大规模问题上求解得到一个近似解的能力比较强，后续在研究中也将进一步关注该方法。

我们目前讨论的方法主要是第一种算法，目前已经与主承研项目进行了一些对接，并尝试对上述算法中使用的模型进行调整，使其能够与该项目的更紧密地结合。

### 列生成方法的基本思路

### 目前能够得到的求解规模

对于第一种算法，能够得到的求解规模为400个武器与400个目标在30秒内得到计算结果。但问题的难度会随着武器与目标的比率上升，比如200个武器攻击100个目标所需时间为50秒，因此在我们的情况中，如果如果希望处理武器与目标的比例较大（即多个武器同时攻击同一目标的情况）问题的复杂度会进一步上升。

第二种算法目前计算的情况主要是武器与目标的比例为1比2，即200个武器攻击400个目标这样的情况，它与我们的问题形式有所区别。它能够在一个小时的时间内，精确求解400个武器攻击800个目标的情况，同时针对500个武器与1000个目标的规模，也能够在两个小时的时间内得到差距为1%以内的解。

【为什么我们要用这个算法】

【如何对问题进行线性化使其变得更容易求解，之前提到过的列生成方法与该问题的结合】

### 子问题求解思路

【子问题的结构，准备采用什么方法进行求解】

## 与北理工对接后对模型进行初步尝试得到的结果

【待完成】

## 结论与未来进展

## 结论

## 对于模型改进的预期

【与北理工交流后，哪些是可能加到模型里面的】